

**Szilassi Lajos:**

Szegedi Tudományegyetem  
Juhász Gyula Tanárképző Foiskolai Kar  
Matematika Tanszék  
E-mail: [szilassi@jgytf.u-szeged.hu](mailto:szilassi@jgytf.u-szeged.hu)

## A kételkedés joga – és kötelessége

(Gondolatok az [Erdély-féle spidron-rendszer](#) vizsgálatára kapcsán)

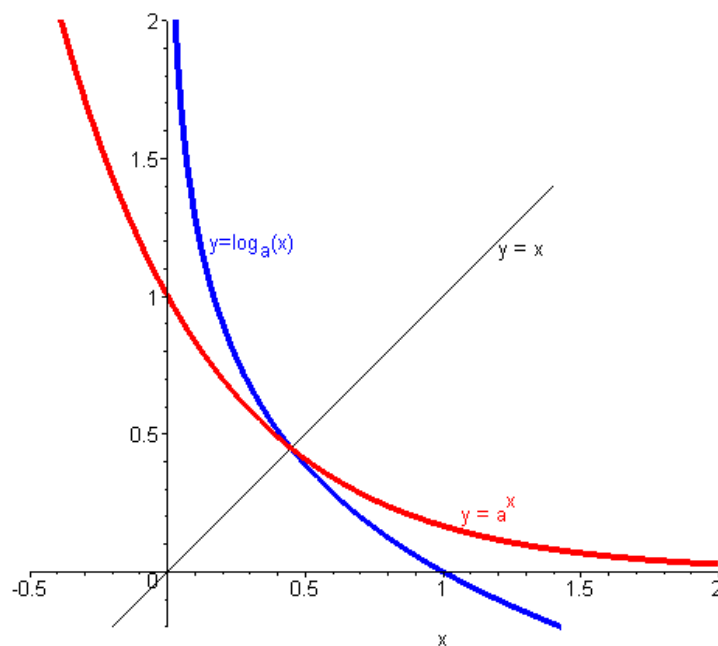
Amikor e sorok írója először kezébe vette a „spidron-fészek” nevű geometriai konstrukció mozgatható papír-modelljét, az első rácsodálkozást követően a kételkedés vált úrrá gondolataiban. Kételkedés abban, hogy ez az Erdély Dániel által felfedezett – és elnevezett – konstrukció valóban rendelkezik-e azokkal a geometriai tulajdonságokkal, amelyek a modell mozgatása (deformálása) közben tapasztalhatunk. E kételkedés történetét és eredményét ismerheti meg az olvasó. Anélkül, hogy a spidron-rendszer minden matematikai szempontból érdeklődésre számot tartó tulajdonságát feltárnánk, elemezni fogjuk, hogy a spidron-fészek milyen mozgásra „képes”. Megmutatjuk, hogy a modell alapján erős sejtésnek tekinthető mozgás valóban tulajdonsága a matematikai eszközökkel pontosan leírt „absztrakt” spidron-fészeknek. Vizsgálatainkhoz a Maple számítógép-algebrai rendszert fogjuk felhasználni, amely amellett, hogy formális matematikai eszközökkel pontos (tehát nem közelítő numerikus) eredményeket szolgáltat, igen jó közelítő számításokra is alkalmas, miközben a megjelenítés és a szemléltetés terén is kiváló eszköznek bizonyul. Mielőtt mindezt megtennénk, néhány példán keresztül megmutatjuk, hogy miért kell óvatosnak lennie egy matematikusnak, különösen egy teljesen új konstrukció megismerésekor.

Kezdjük egy (látszólag) nem ide tartozó feladattal:

Hány (valós) megoldása van az  $\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}}(x)$  egyenletnek? A válasz első pillantásra nem tűnik nehéznek.

Az  $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$  és az  $y = \log_{\frac{1}{16}}(x)$  függvények egymás inverzei, ezért grafikonjaik egymás tükörképei az  $y = x$  egyenesre vonatkozóan.

Ennek megfelelően az  $y = x$  egyenesen metszik egymást, és csak ott, mivel mindkét görbe monoton. Tehát az egyenletnek **csak egy** – transzcendens – megoldása van, melyet csak közelítő módszerekkel tudunk meghatározni.

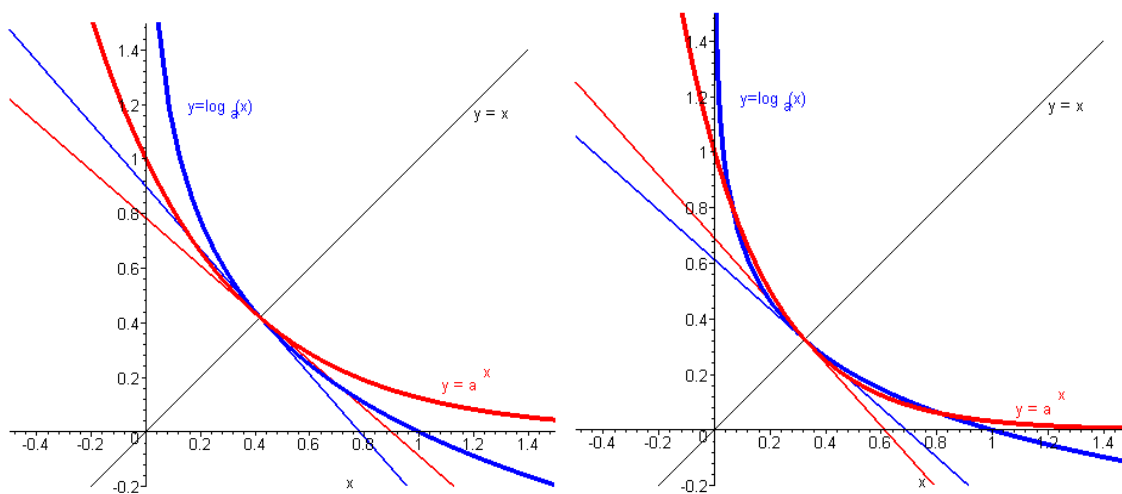


Az eredeti egyenlet megoldása helyett elegendő az  $x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$  egyenlet egyetlen gyökét megkeresnünk, amelyre a Maple felhasználásával az  $x \sim 0.3642498896\dots$  (közelítő) értéket kaptuk.

Azok az olvasóink, akik helyénvalónak vélik a fenti okfejtést, próbálják ki, hogy az  $x = \frac{1}{2}$  valamint az  $x = \frac{1}{4}$  ugyancsak gyöke az egyenletnek. Hol a hiba<sup>1</sup>?

A „megoldás”-nak az a része, amely arra vonatkozik, hogy az egyenlet két oldalának megfelelő függvény egymás inverze, helytálló, így a két függvénynek valóban van metszéspontja az  $y=x$  egyenesen. Abból viszont, hogy mindkét görbe monoton, nem következik, hogy másutt nem metszhetik egymást. Ennek illusztrálására mutatunk egy „durvább” példát.

Ábrázoljuk az  $y = a^x$  függvényt és inverzét, az  $y = \log_a x$  függvényt közös koordináta-rendszerben az  $y=x$  egyenesre eső  $(x_0; x_0)$  metszéspontjukba húzott érintőkkel együtt. A baloldali ábrán  $a = \frac{1}{8}$ , a jobboldalin  $a = \frac{1}{32}$



Észrevehetjük, hogy  $a = \frac{1}{8}$  esetben az exponenciális függvény érintőjének az irányszöge abszolút értékben kisebb, mint  $45^\circ$ , így az inverzéé nagyobb. Ez azt jelenti, hogy például az  $x < x_0$  értékekre a logaritmus függvény érintője fölötté halad az exponenciális függvény érintőjének, maga a logaritmusfüggvény pedig még e fölött. Így ezen az intervallumon nem metszheti az exponenciális függvényt.

<sup>1</sup> Ez az igen érdekes kérdés SHARAGIN japán matematikustól származik, aki ehhez hasonló szép feladatokkal intette nagyobb óvatosságra olvasóit. [3]

Ugyanakkor  $a = \frac{1}{32}$  esetben, – mivel a logaritmusfüggvény érintőjének az irányszöge lesz kisebb abszolút értékben  $45^\circ$ -nál – ha  $x < x_0$  akkor az az  $x_0$  pont közelében a logaritmusfüggvény alatta halad az exponenciális függvénynek. Ugyanakkor metszenie kell valahol, mivel az exponenciális függvény metszi az  $y$  tengelyt, a logaritmus-függvény pedig nem. Ennek a metszéspontnak az  $y=x$  egyenesre vonatkozó tükörképe ugyancsak metszéspont lesz. Eszerint, ha a  $0 < a < 1$  paraméter elég közel van 0-hoz, akkor biztosan három, ha elég közel van 1-hez, biztosan egy gyöke van az  $a^x = \log_a x$  egyenletnek. Így hát nem volt igazunk abban, hogy egy monoton függvény és inverze csak az  $y=x$  egyenesen metszheti egymást.

Keressük meg azt az  $a$  paraméter értéket, amely e két állapot közötti határeset! Ez nyilvánvalóan ott van, ahol a két függvény  $(x_0 ; x_0)$  pontbeli érintője egybeesik, azaz merőleges az  $y=x$  egyenesre (meredeksége  $-1$ ). Ezekből a feltételekből  $a$ -ra és  $x$ -re egy kétismeretlenes egyenletrendszert írhatunk fel:

$$\left. \begin{array}{l} x = a^x \\ a^x \ln(a) = -1 \end{array} \right\} \text{ (Az egyenlet bal oldalán az exponenciális függvény deriváltja szerepel.)}$$

Ebből a kissé szokatlan egyenletrendszerből  $x$  és  $a$  – többszörös behelyettesítéssel – könnyen meghatározható:

$$x \ln a = -1 \quad \ln a^x = -1 \quad a^x = \frac{1}{e} \quad x = \frac{1}{e} \quad a^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} \quad a = \left(\frac{1}{e}\right)^e = e^{-e} \approx 0.065988$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha  $a \leq \left(\frac{1}{e}\right)^e = e^{-e} < 1$ , akkor az  $a^x = \log_a x$  egyenletnek egy valós

gyöke van,  $0 < a < \left(\frac{1}{e}\right)^e = e^{-e}$  esetben pedig, – így  $a = \frac{1}{16} = 0.0625$  esetben is – három.

Megjegyezzük még, hogy az  $a = \frac{1}{16} = 0.0625$  olyan közel van a határesethez, hogy a két oldalon megfelelő függvény ábrázolásával semmi támpontot nem kapunk a kérdés

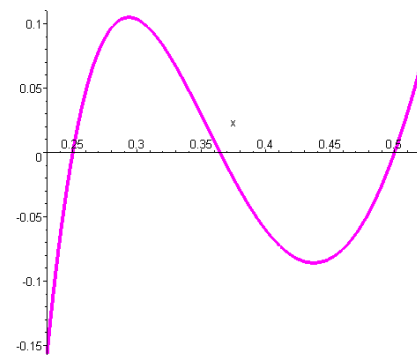
eldöntéséhez. Az  $\left(\frac{1}{15}\right)^x = \log_{\frac{1}{15}}(x)$  egyenletnek például a

fentiek szerint csak egy valós gyöke van, mivel  $e^{-e} \approx 0.06598 < \frac{1}{15} \approx 0.0666$

Legfeljebb úgy kaphatunk gyökök számára vonatkozóan jó sejtést, ha egy alkalmas függvényábrázoló programmal lerajzoljuk a két függvény különbségét. A mellékelt rajz az

$y = 100 \left( \left(\frac{1}{16}\right)^x - \log_{\frac{1}{16}} x \right)$  függvény grafikonja, amelyről

leolvasható, hogy az eredeti egyenletünknek a két oldalon vett helyettesítési értéke a  $(0,2; 0,52)$  intervallumon alig 0,001-del tér el egymástól.



Könnyen misztikussá válhat a matematika, ha úgy kerül elénk egy (akár igaz, akár hamis) állítás, mint ahogy egy buvész elvarázsol egy nyulat a cylinderbol, a mélyen tisztelt publikum legnagyobb ámulatára. Íme egy „nyúl a kaplabból” jellegű állítás, amely egy időben futótüzként terjedt az algebristák körében<sup>2</sup>:

Az  $e^{\pi\sqrt{163}}$  hatvány egész szám, pontosan 262537412640768744 . Az állítás eléggé meglepő, hiszen a hatvány alapjában és kitevojében egyaránt transzcendens szám áll.

Vajon igaz ez? Honnan „jön rá” valaki egy ilyen összefüggésre? Hogyan lehetne igazolni?

Ha valaki elénk állna egy nehezen követhető „bizonyítással”, nem lennénk könnyű helyzetben. Ahhoz, hogy cáfoljuk, elegendő kello pontosságig meghatározni a hatvány értékét. „Kézzel” ez is nehezen menne, ugyanis – a Maple felhasználásával könnyen ellenorizhető – a kapott szám tört része mintegy 10 jegynyi pontosságig 0, csak ennél pontosabb számolás esetén kapunk 0-tól különböző számjegyeket. Akkor sem járnánk jobban,

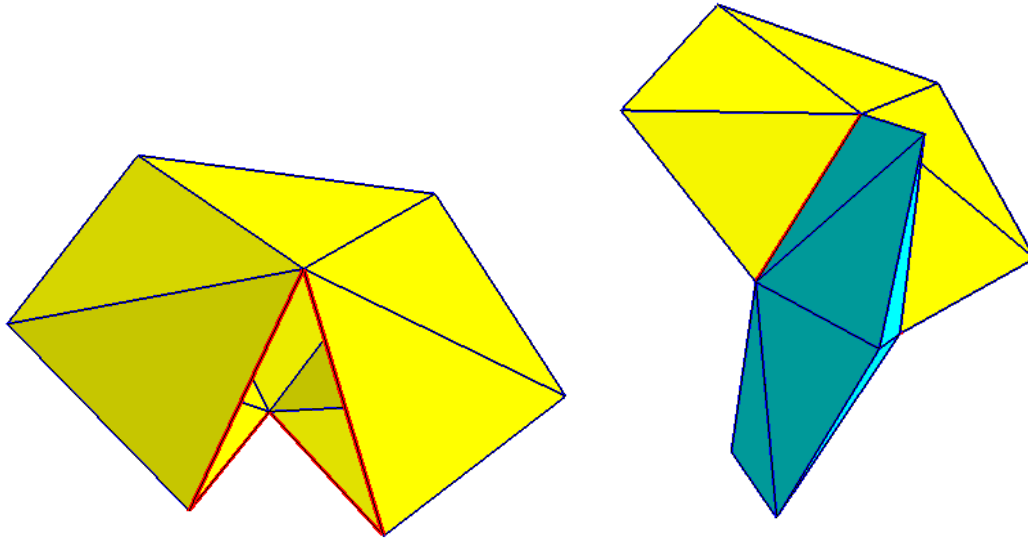
ha az „állítást”  $\left(\frac{\ln(262537412640768744)}{\pi}\right)^2 = 163$  alakban írják fel, ugyanis az egyenlőség

bal oldala valóban 163 mintegy 20 tizedesjegynyi (!! ) pontosságig. A Maple azonban ennél jóval nagyobb pontossággal is képes számolni, így végül is kiderül, hogy a vizsgált szám nem egész<sup>3</sup>.

A geometriában is könnyen találunk példát arra, hogy az „úgy tunik” és az „úgy van”, mennyire nem ugyanazt jelenti. Készítsünk tíz – egységnyi oldalú – szabályos háromszögből egy „nyitott” kettős gúlát. Az, hogy „mennyire nyitott”, kizárólag a kettős gúla két szemközi csúcsa közötti távolságtól függ. Válasszuk ezt a távolságot akkorára, mint a gúlák közös alapjának a két szabadon maradt csúcsa közötti távolság. Ekkor két ilyen egybevágó alakzatot összeilleszthetünk egyetlen 20db szabályos háromszögből álló poliéderré (amit akár nevezhetnénk egy szerkezetében sem szabályos ikozaédernek).

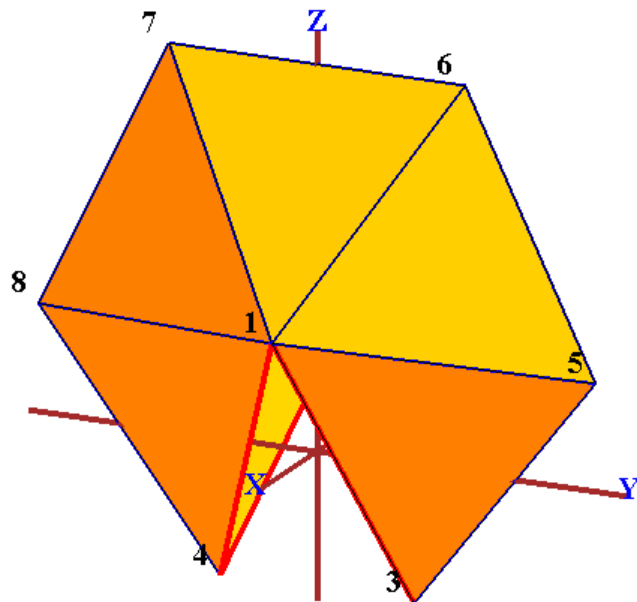
<sup>2</sup> <http://www.shef.ac.uk/puremath/theorems/nearint.html>

<sup>3</sup> Tekintsük meg az erről készült [MAPLE programot](#)

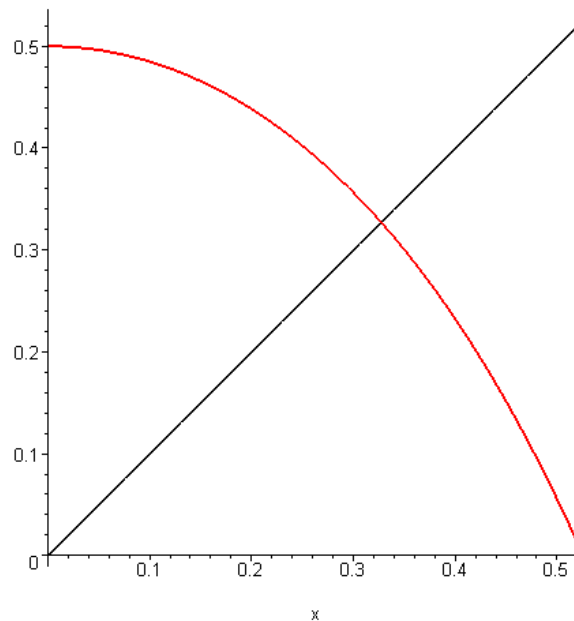


A poliéder papírmodelljét elkészítve tapasztalhatjuk, hogy ez a poliéder mozgatható: az egyik kettos gúla csúcsait összébb nyomva a másiknak a csúcsai messzebb kerülnek egymáshoz, és viszont. Valóban „mozgatható” ez a poliéder? Úgy tunik. [De úgy is van?](#)

A kérdés eldöntésére rakjuk egy jól megválasztott térbeli koordinátarendszerbe a konstrukciót, jelöljük  $x$ -el a kettos gúla **1.** és (az alábbi rajzon éppen nem látható) **2.** sorszámú csúcsa közötti távolság felét,  $y$ -nal a két szabadon maradó **3.** és **4.** csúcs távolságának a felét, majd írjuk fel  $y$ -t, mint  $x$  függvényét.



A részleteket most mellozve, az  $y = f(x) = \sqrt{1-x^2} \sin\left(5\arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\right)$  összefüggést kaptuk.<sup>4</sup>



A függvénynek a geometriai tartalommal bíró  $[0, x_0]$  intervallumát rajzoltuk fel, ahol

$$f(x_0) = 0, \text{ amelybol } x_0 = \frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10} \approx 0.5257$$

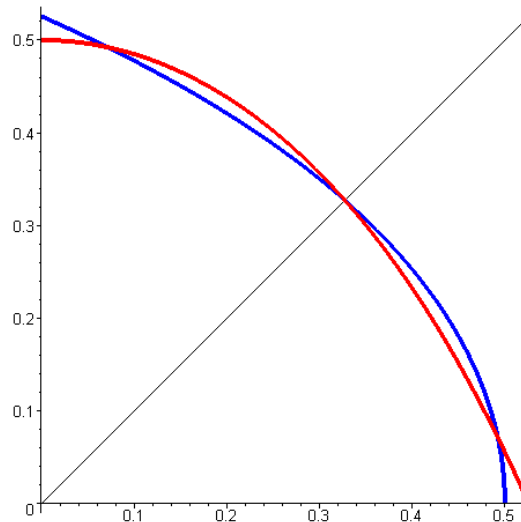
Ahhoz, hogy megadjuk a poliéder szabályos háromszögekből épített, biztosan létező változatának a koordinátáit, az  $f(x) = x$  egyenletet kell megoldanunk. A fenti egyenlet közelítő gyökét a Maple könnyedén kiszámolja, elegendő nagy pontossággal:  $x \approx 0.327267$

Ha a poliéder mozgatható, akkor annak kell teljesülnie, hogy az egyik feléhez tartozó gúlamagasság (az **1.-2.** távolság) – legalább egy bizonyos intervallumon mozogva – folyamatosan olyan távolságot határoz meg a szabadon maradó **3.** és **4.** csúcsok között, amely éppen megegyezik a konstrukció másik kettősgúlájának a csúcsai közötti távolságával. Vagyis ha teljesül, hogy  $y_1 = f(x_1)$ , akkor annak is teljesülnie kell, hogy  $x_1 = f(y_1)$  Ez pedig azt jelenti, hogy az  $f(x)$  függvénynek és inverzének ezen az intervallumon egybe kell esnie.

Az  $f(x)$  függvény inverze (a vizsgált intervallumon) a  $\bar{f}(x) = \sqrt{\frac{4x-5+\sqrt{8x+5}}{4x-10}}$  függvény.

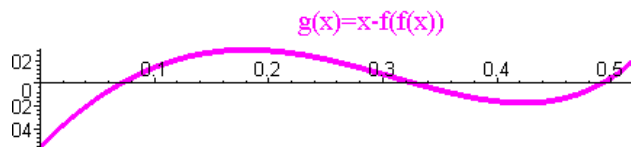
Már a függvényt lerajzolva is szembevetve, hogy  $f(x)$  és  $\bar{f}(x)$  pontosan három helyen metszi egymást – hasonlóan az előző példánkhoz. A Maple segítségével könnyedén kitapogatható az  $f(x) = \bar{f}(x)$  egyenlet három gyöke, melyek a vizsgált intervallumba esnek.

<sup>4</sup> Ez talán nem tunik „nyúl a kalapból” jellegű állításnak [a mellékelt MAPLE program](#) talán segít ezt megvilágítani.



Az előzők alapján nem lepodunk meg azon, hogy egy monoton függvény és az inverze akár három helyen is metszheti egymást. Az ábráról leolvasható, hogy a poliéder nem mozgatható ugyan, viszont van még két (egymással egybevágó) „stabil” változata, vagyis az  $f(x)$  függvény és az inverze a vizsgált intervallumon belül valóban három helyen metszi egymást. Ezt először M. Goldberg mutatta ki 1978-ban. [1] Az összetartozó  $(x,y)$  értékpár:  $(0.071185256\dots, 0.492373\dots)$  és fordítottja, valamint a  $(0.327267375\dots, 0.327267375\dots)$  pont, ahol a  $0.327267375\dots$  szám az  $x=f(x)$  egyenletnek is a (közelítő) gyöke.

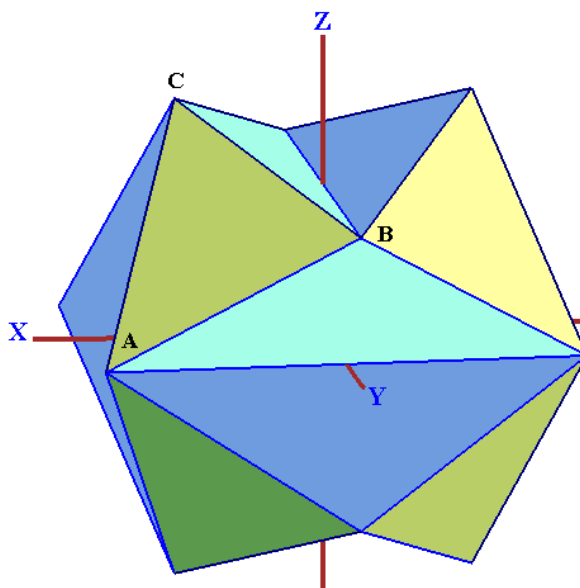
Ezeknek a numerikus értékeknek a meghatározásához nem kell feltétlenül az  $f(x)$  inverzét megtalálnunk, ezek a metszéspontok ugyanott vannak, ahol a  $g(x) = x - f(f(x))$  függvény zérushelyei:



Ha a szabályos háromszögek helyett olyan egyenlőszárú háromszögekből építjük fel a poliédert, amelynek a szára 3% -kal kisebb, vagy nagyobb, mint az alapja, akkor már csak egyetlen „stabil” poliédert kapunk. Az így kapott poliéder viszont csak akkor lehetne mozgatható, ha a  $g(x)$  függvény – legalább egy intervallumon – azonosan 0 értéket venne fel. Ez viszont biztosan nem teljesül.

Gyakorlatilag ugyancsak könnyedén mozgatható annak a poliédernek a papírmmodellje, amelynek a csúcsai megegyeznek egy ikozaéder csúcsaival, lapjai vagy szabályosak, vagy un-

tompaszögu arany-háromszögek: száruk egységnyi, alapjuk  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , az aranymetszés aránya.



Legyen ennek a poliédernek  $A$ ,  $B$  és  $C$  az a három csúcsa, amelyek egy – az egyszerűbb számolás kedvéért 2 egységnyi oldalhosszú – szabályos háromszöget határoznak meg. A poliédert elhelyezhetjük úgy a térbeli derékszögu koordinátarendszerben, ahogy az ikozaédert is legcélszerűbb: e három pont essen a három koordináta-síkra. Legyenek a koordinátáik:

$$A = [y, x, 0]$$

$$B = [0, y, x]$$

$$C = [x, 0, y]$$

Felírva a pontok közötti távolságot,  $x$  és  $y$  között egyetlen összefüggéshez, az  $y = f(x) = \frac{x + \sqrt{8 - 3x^2}}{2}$  függvényhez jutunk<sup>5</sup>. Erre a függvényre – mint várható volt –

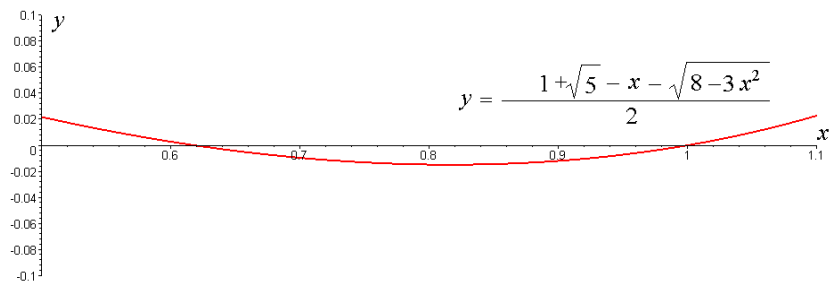
teljesül, hogy  $f(1) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau$  (amely éppen a szabályos ikozaéder koordinátáit jelenti) de

emellett,  $f(\tau - 1) = f\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau$  is teljesül, sőt e két stabil helyzet között  $f(x) - \tau$

nem több, mint 0.015 -del, tehát kevesebb, mint 1%-kal tér el a 0-tól. De eltér, így matematikailag ez sem mozgatható, ennek a lapjaival adott poliédernek ez a két stabil helyzete van.

---

<sup>5</sup> Amennyiben adottak a feltételek, javasoljuk, hogy ellenőrizze a számításokat [ezzel a MAPLE programmal](#).

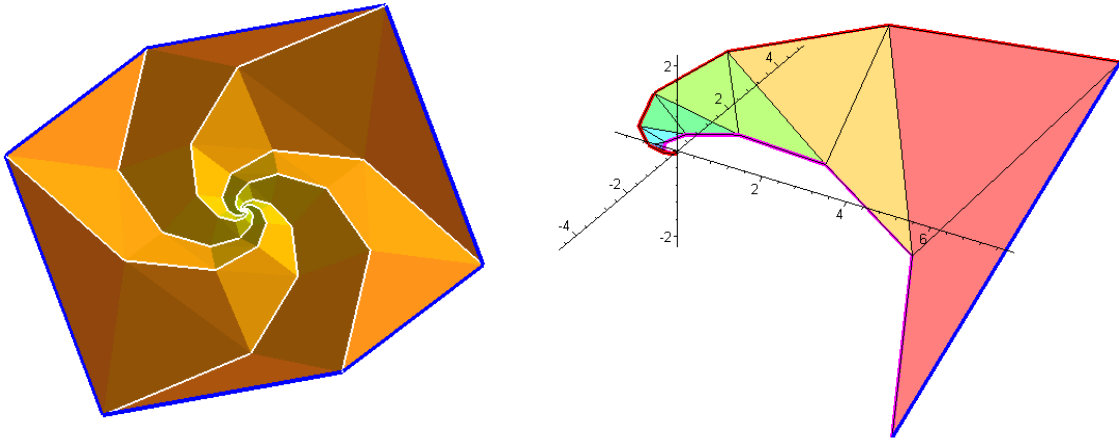


Megjegyezzük még, hogy ismert több, látszólag [mozgatható poliéder](#) ([2], 224. old., azonban igen nehéz valóban, matematikai eszközökkel igazolható módon mozgatható poliédert konstruálni. Pl. e sorok írója nem ismer más bizonyítottan mozgatható poliédert, mint az itt: ([2], 246. old.) leírt 9 csúcú, 14 lapú és 21 élű konkáv poliédert. Arról, hogy ez a poliéder valóban mozgatható, Csirmaz László közölt egy bizonyítást.[4] Magát a poliédert Klaus Steffen találta meg.

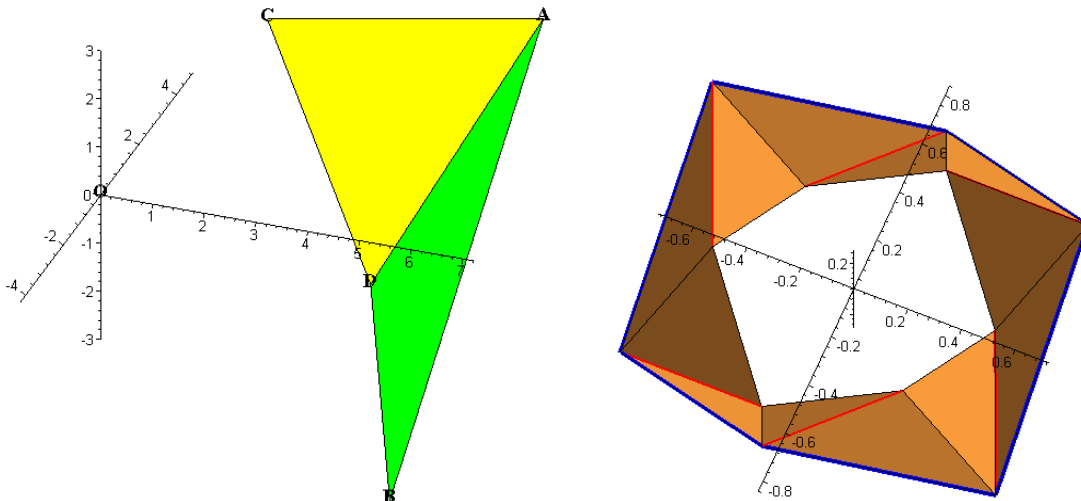
Azt, hogy a konvex poliéderek merevek, először Cauchy bizonyította 1813-ban. Cauchy tétele pontosan így szól: „Ha két konvex poliéder felépítése azonos és megfelelő lapjaik egybevágók, akkor vagy orientációtartóan, vagy tükrösen egybevágók (valamely síkra vonatkozóan). Ez a tétel többet mond ki annál, hogy nem mozgathatók, konvex poliéderekkel az sem fordulhat elő, mint a fent bemutatott poliéderekkel, hogy ti. azonos (topológiai) felépítés és egybevágó lapok esetén is akadhat több, egymással nem egybevágó változata is a poliédernek. A Cauchy-tétel bizonyítása egyébként eléggé hosszadalmas. ([2], 228. old.) , ([5]. 58. fejelet.)

Reméljük sikerült megvilágítanunk, miért volt szükség arra, hogy némi gyanakvással, vagy legalábbis kelő óvatossággal fogjunk hozzá a térbeli spidron-fészkek mozgásának az elemzéséhez.

A spidron-"fészkek" egy szabályos hatszög alkalmas módon történő összehajtásával előálló felület. Egy ilyen fészkek hat, egymással egybevágó "kar"-ból áll, ahol mindegyik kar **alapalakzatok** egymáshoz kapcsolódó sorozata. Ez a sorozat akárhány ilyen alapalakzattól állhat, gyakorlatilag a sorozatnak az első néhány tagját célszerű meghatározni, lerajzolni. Mondjuk azt, hogy a spidron (-fészkek, ill.-kar) mélysége  $n$ , ha egy spidron-kar  $n$  egymáshoz kapcsolódó alapalakzattól áll.



Egy alalakzat egy  $120^\circ$ -os csúcsszögu egyenloszárú háromszögbol (ABD háromszög) és egy ehhez illesztett szabályos háromszögbol (ACD háromszög) áll, amelyek együtt – amennyiben egy síkban vannak – egy derékszögu háromszöget alkotnak.

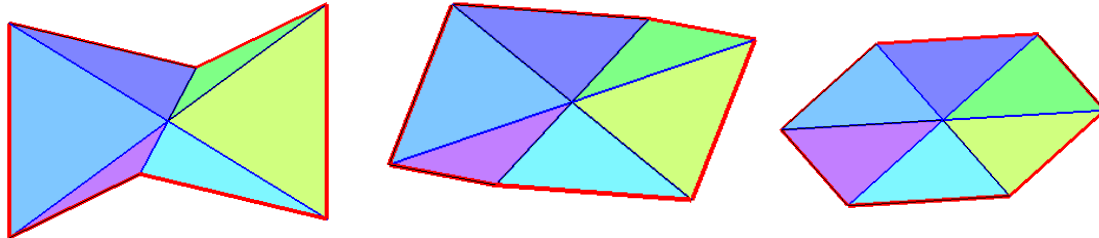


Használni fogjuk még a **spidron-gyuru** elnevezést, amely lényegében egy 1 mélységű spidron-fészkek: hat egymáshoz kapcsolt egybevágó alalakzataból áll.

A spidron-fészket szemügyre véve – és a lehetséges módon deformálva (hajtogatva) – észrevehetjük, hogy a fészkek „szélét” alkotó térbeli hatszögvonal egymással egyenlo élei mind ugyanakkora szöget zárnak be egy síkkal, amely e hat él felezopontjainak a síkja. Nevezük ezt a spidron-fészkek **síkjának** (noha maga a spidron-fészkek csak határesetben síkidom: ez a síkbeli spidron-fészkek). A spidron-fészkek szélét alkotó térbeli szabályos hatszögnek e síkra eso meroleges vetülete ugyancsak szabályos hatszög.

Térbeli szabályos hatszöget kapunk, ha egy hatszögvonaltól csak azt követeljük meg, hogy élei, valamint a szomszédos élek szögei egyenlok legyenek. A térbeli hatszögvonal természetesen nem határoz meg egy hatszöglapot. Nevezük **térbeli szabályos hatszöglapnak** azt a hat egyenloszárú háromszögbol álló alakzataból, amelyben a háromszögek alapjai a térbeli szabályos hatszögvonal élei, közös csúcsuk e hatszögvonal középpontja. A térbeli szabályos hatszöglap az egymáshoz csatlakozó élei mentén mozgatható ugyan, de ha

megköveteljük, hogy maradjon térbeli szabályos hatszög, akkor merev, hiszen ha az élei nagyobb szöveget zárnak be a hatszög síkjával, akkor közelebb kerülnek az origóhoz, így csökkennek a hatszöglapokat alkotó egyenlőszárú háromszögek szárai. A térbeli szabályos hatszög középpontosan szimmetrikus alakzat és – mint látni fogjuk – a spidron-fészek is az.



A spidron-fészek szélétől követeljük meg hogy (térbeli, vagy síkbeli) szabályos hatszögvonal legyen.

Azt fogjuk belátni, hogy ha a spidron-fészek széle, amely egyben az első spidron-gyuru külső széle térbeli szabályos hatszög, akkor a belső széle is az. Ez teszi lehetővé, hogy a spidron-fészek egymásba illesztett gyuruk sorozataként is felépíthető. Egy spidron-gyuru belső szélének az élei kisebb szöveget zárnak be a spidron síkjával, mint a külső. Emiatt nem mondhatjuk, hogy a „végtelenül mély” térbeli spidron-fészek önmagához hasonló alakzat. A síkbeli viszont az.

Ahhoz, hogy egy spidron fészek mozgását leírjuk, elegendő egyetlen alapalakzat mozgását elemeznünk, mivel ilyen alapalakzatokból a megfelelő paraméterek megadásával felépíthető egy kar, abból pedig egybevágósági transzformációkkal az egész spidron-fészek.

Helyezzük a spidron-fészeket egy térbeli koordináta-rendszerbe úgy, hogy síkja az (xy) sík legyen, középpontja legyen az origó.

Egy, a spidron-fészek szélét alkotó szakaszt három paraméterrel jellemezhetünk:

- d : a szakasz hossza;
- $\alpha$  : a szakasz felezőponjába mutató helyvektor irányszöge;
- $\beta$  : a szakasznak az (xy) síkkal bezárt szöge.

Ezt az alábbi Maple eljárásban realizáltuk:

```
V:= proc(d,alpha,beta)
  local F,A,c,V;
  c:=d*cos(beta)*sqrt(3)/2;
  F:=[c*cos(alpha),c*sin(alpha),0]:
  A:=[d*sin(alpha)*cos(beta)/2,
      d*cos(alpha)*cos(beta)/2,
      d*sin(beta)/2]:
  V:=[F+A,F-A]:
end proc;
```

A szakasznak az xy síkra eső merőleges vetülete  $d \cos(\beta)$ , így felezőpontja az origótól  $c = d \cos(\beta) \frac{\sqrt{3}}{2}$  távolságra van, Ebből felírhatók a felezőpont koordinátái, majd a szakasz végpontjának a koordinátái. E két pont koordinátáit kapjuk az eljárás outputjaként (kimenő adataiként).

Magát a spidron-fészket egyértelműen meghatározza a külső spidron-gyuru, azt pedig a feltételeinknek eleget tevő térbeli hatszög, e gyuru külső szélé. Ezt a térbeli hatszöget pedig két adattal jellemezhetjük: egy oldalának a  $d$  hosszával és az oldal  $xy$  síkkal bezárt  $f$  szögével.

Az alapalakzatunk  $AB$  oldalát helyezzük el úgy, hogy a felezőpontja a koordináta-rendszer  $x$  tengelyére essen. A  $CD$  szakaszt írjuk fel a fenti eljárás felhasználásával, egyelőre meghatározatlan paraméterként kezelve a felírására használt  $a$  és  $b$  változókat. Így az alapalakzat csúcsai így írhatók fel:

$$A := \left[ \frac{1}{2} d \cos(f) \sqrt{3}, \frac{1}{2} d \cos(f), \frac{1}{2} d \sin(f) \right]$$

$$B := \left[ \frac{1}{2} d \cos(f) \sqrt{3}, -\frac{1}{2} d \cos(f), -\frac{1}{2} d \sin(f) \right]$$

$$C := \left[ -\frac{1}{6} d \sqrt{3} \sin(a) \cos(b) + \frac{1}{2} d \cos(b) \cos(a), \right. \\ \left. \frac{1}{6} d \sqrt{3} \cos(a) \cos(b) + \frac{1}{2} d \cos(b) \sin(a), \frac{1}{6} d \sqrt{3} \sin(b) \right]$$

$$D := \left[ \frac{1}{6} d \sqrt{3} \sin(a) \cos(b) + \frac{1}{2} d \cos(b) \cos(a), \right. \\ \left. -\frac{1}{6} d \sqrt{3} \cos(a) \cos(b) + \frac{1}{2} d \cos(b) \sin(a), -\frac{1}{6} d \sqrt{3} \sin(b) \right]$$

A feladatunk az, hogy úgy adjuk meg az  $a$  és  $b$  értékét, mint  $f$  függvényét, hogy a  $BD$ ,  $DC$ ,  $CA$  és  $DA$  szakaszok hossza egyaránt  $d \frac{\sqrt{3}}{3}$  hosszú legyen. A  $CD = d \frac{\sqrt{3}}{3}$  a felírásból adódóan egy bármely  $(a, b)$  értékre fennálló azonosság. Az a transzformáció, amely az  $AB$  szakaszt a  $CD$ -be viszi, az  $A$ -t a  $C$ -be,  $B$ -t a  $D$ -be transzformálja, így mindenképpen teljesülnie kell az  $AC=BD$  összefüggésnek. Ezt a Maple is azonnal igazolta, így két egyenletből álló egyenletrendszerünk maradt, amelyben  $a$ -t és  $b$ -t ismeretlennek, az  $f$  változót pedig független paraméternek tekintjük:

$$e1 := \frac{3}{4} \cos(b)^2 - 2 \cos(b) \cos(a) \cos(f) \sqrt{3} + \frac{9}{4} \cos(f)^2 - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin(b) \sin(f)$$

$$e2 := \frac{3}{4} \cos(b)^2 - 3 \sin(a) \cos(b) \cos(f) - \cos(b) \cos(a) \cos(f) \sqrt{3} + \frac{9}{4} \cos(f)^2 \\ + \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin(b) \sin(f)$$

Az egyenletrendszer Maple által megadott megoldásai közül "kézzel" kellett kiválasztani azt, amely a feladat geometriai tartalmának megfelel. A kapott eredmények egyszerűbb alakra hozásához is alkalmasint „segíteni” kellett a Maple -nek. Ugyanis a geometriai tartalomból adódóan elvégezhetők voltak olyan trigonometriai egyszerűsítések, amelyeket a programnak nem volt „joga” elvégezni. Így kaptuk  $a$ -ra és  $b$ -re az alábbi –  $f$ -tol függo – kifejezéseket:

$$a(f) = \arccos \left( \frac{\sqrt{3}(1-2\cos(f)+3\cos^2(f)) - \sin(f)\sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos^2(f)}}{4\cos(f)\sqrt{2-4\cos(f)+3\cos^2(f)}} \right)$$

$$b(f) = \arctan \left( \sqrt{\frac{-1+4\cos(f)-3\cos^2(f)}{2-4\cos(f)+3\cos^2(f)}} \right)$$

Mivel a "kézi" és „gépi” számolást együtt alkalmaztuk, nem lehettünk biztosak abban, hogy ezek a függvények valóban leírják a spidron mozgását, amíg nem ellenoriztük, hogy a  $f$  paraméter értékétől függetlenül minden esetben teljesül az  $e_1=0$  és  $e_2=0$  egyenlőség. A vizsgálat arra vezetett, hogy az alábbi – elrettentésképpen bemutatott – trigonometrikus kifejezésről kellett belátni, hogy minden szóba jöve  $f$  értékre nézve  $f$ -tol függetlenül azonosan nulla:

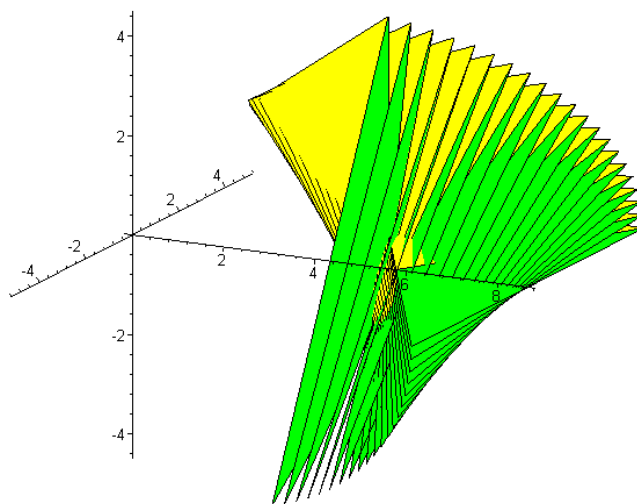
$$\begin{aligned} & -3 \cos(f)^2 - 1 + 2 \cos(f) + 2 \sqrt{2} \left( \left( 2 \cos(f)^2 - 12 \cos(f)^3 + 9 \cos(f)^4 - 1 + 4 \cos(f) + \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \sqrt{3} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) - 2 \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \cos(f) \sqrt{3} \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) + 3 \right. \right. \\ & \left. \left. \cos(f)^2 \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \sqrt{3} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) \right) / \left( (2-4\cos(f)+3\cos(f)^2) \cos(f)^2 \right) \right)^{(12)} \\ & \cos(f) \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} - 4 \sqrt{2} \left( \left( 2 \cos(f)^2 - 12 \cos(f)^3 + 9 \cos(f)^4 - 1 \right. \right. \\ & \left. \left. + 4 \cos(f) + \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \sqrt{3} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) - 2 \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \cos(f) \sqrt{3} \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) + 3 \right. \right. \\ & \left. \left. \cos(f)^2 \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \sqrt{3} \right. \right. \\ & \left. \left. \sqrt{-1+4\cos(f)-3\cos(f)^2} \sin(f) \right) / \left( (2-4\cos(f)+3\cos(f)^2) \cos(f)^2 \right) \right)^{(12)} \\ & \cos(f)^2 \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} + 3 \sqrt{2} \left( \left( 2 \cos(f)^2 - 12 \cos(f)^3 + 9 \cos(f)^4 - 1 \right. \right. \\ & \left. \left. + 4 \cos(f) + \sqrt{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2} \sqrt{\frac{1}{2-4\cos(f)+3\cos(f)^2}} \sqrt{3} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{-1 + 4 \cos(f) - 3 \cos(f)^2} \sin(f) - 2 \sqrt{2 - 4 \cos(f) + 3 \cos(f)^2} \\
& \sqrt{\frac{1}{2 - 4 \cos(f) + 3 \cos(f)^2}} \cos(f) \sqrt{3} \sqrt{-1 + 4 \cos(f) - 3 \cos(f)^2} \sin(f) + 3 \\
& \cos(f)^2 \sqrt{2 - 4 \cos(f) + 3 \cos(f)^2} \sqrt{\frac{1}{2 - 4 \cos(f) + 3 \cos(f)^2}} \sqrt{3} \\
& \left. \sqrt{-1 + 4 \cos(f) - 3 \cos(f)^2} \sin(f) \right) / \left( (2 - 4 \cos(f) + 3 \cos(f)^2) \cos(f)^2 \right) \Bigg)^{(1/2)} \\
& \cos(f)^3 \sqrt{\frac{1}{2 - 4 \cos(f) + 3 \cos(f)^2}} - \sqrt{2 - 4 \cos(f) + 3 \cos(f)^2} \\
& \sqrt{\frac{1}{2 - 4 \cos(f) + 3 \cos(f)^2}} \sqrt{3} \sqrt{-1 + 4 \cos(f) - 3 \cos(f)^2} \sin(f)
\end{aligned}$$

Sikerült. Ehhez ismét a program és a gyanakvó felhasználó együttes munkájára volt szükség.

Megnyugtató módon sikerült belátni, hogy spidron-fészek valóban mozgatható, és a fenti  $a(f)$  és  $b(f)$  függvényekkel írható le a mozgása.

Bár e két függvény értelmezési tartománya ennél bővebb, a geometriai tartalommal bíró  $\beta_1 = f$  értékek a  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  intervallumba esnek. Ugyanis  $f = \frac{\pi}{3}$  esetén az  $ABD$  és  $ACD$  háromszögek egyaránt merolegesek az  $(xy)$  síkra, így e fölött már fizikailag nem realizálható, önátmetszo felület kapnánk.



[Magának egy spidron-karnak, ill. a spidron-fészeknek az eloállításá e paraméterek ismeretében már könnyen megoldható feladat.](#)

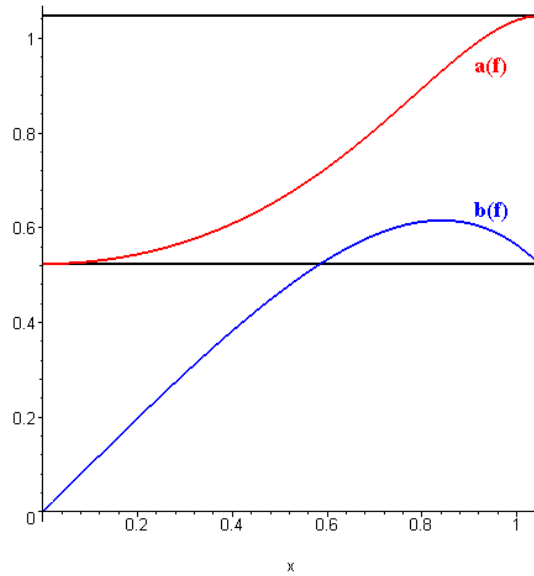
Az első alapelakzat  $d_1 = d$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_1 = f$  adataiból kiindulva a spidron-kar  $k$ -edik alapelakzatának bemenő adataiból az alábbi – szimultán – rekurzív képletekkel kapjuk a  $k+1$ -edik alapelakzat bemenő adatait:

$$d_{k+1} = \frac{d_k \sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + a(\beta_k)$$

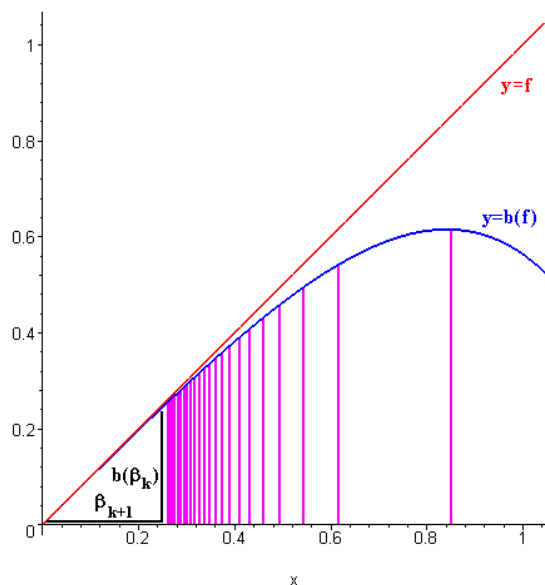
$$\beta_{k+1} = b(\beta_k)$$

Az  $a(f)$  és  $b(f)$  függvények grafikonja önmagában nem sok lehetőséget nyújt a spidron-fészek tulajdonságainak az elmélyültebb elemzésére.



Legfeljebb annyit állapíthatunk meg, hogy minél nagyobb a legkülső gyuru oldalainak az  $xy$  síkkal bezárt szöge, annál jobban –  $f = 60^\circ$  esetén éppen  $60^\circ$ -kal – fordul el az első spidron-gyuru belső hatszögének az  $xy$  síkra eső meroleges vetülete a külső vetületéhez képest. Az elfordulás mértéke egyre csökken, síkbeli esetben  $30^\circ$ . Ugyanígy az éleknek az  $xy$  síkkal bezárt szöge is fokozatosan csökken, bár ez csökkenés igen lassú, vagyis a spidron-fészek egyre beljebb lévő – és egyre kisebb – gyurui egyre jobban bele simulnak az  $(xy)$  síkba.

De vajon biztosan bele simulnak-e?



Azt kell igazolnunk, hogy a

$$\beta_1 = f \quad \left( 0 \leq f \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\beta_{k+1} = b(\beta_k) \quad (k = 2, 3, \dots)$$

rekurzív képletessel megadott sorozat a 0-hoz tart, azaz  $\lim \mathbf{b}_n = 0$ , vagyis a fenti ábránk függőleges vonalai csak az origóban surusódnak össze.

A kérdés azért nem nyilvánvaló, mert ha az  $y = b(f)$  függvény helyett az  $y = f$  függvénnyel határoznánk meg egy ilyen rekurzív sorozatot, akkor az egy konstans sorozat lenne. A mi  $b(f)$  függvényünk azonban éppen az  $y = f$  függvényhez simul hozzá az origó közelében:

$$\lim_{f \rightarrow 0^+} (b'(f)) = 1$$

Akár „kézzel”, akár a MAPLE felhasználásával könnyen belátható, hogy a  $b(f)$  függvény folytonos a vizsgált  $\left( 0, \frac{\pi}{3} \right]$  intervallumon. Ezen az intervallumon az is teljesül, hogy  $b(f) < f$ .

Általánosabban: ha az  $y = b(f)$  függvény folytonos, és a vizsgált intervallum minden értékére teljesül, hogy  $0 < b(f) < f$  akkor az összes ily módon megadott rekurzív sorozat 0-hoz tart. Ha ugyanis nem így lenne, hanem a sorozat határértéke egy  $0 < h$  szám lenne, akkor a függvénynek – a folytonosság miatt – a  $h$  pontban éppen  $h$  lenne a helyettesítési értéke, ami ellentmondana a feltételeinknek.

A matematika eszközei persze nem adnak szemléletes képet arról, hogy ez a sorozat milyen „lassan” tart a 0-hoz, vagyis egy térbeli spidron fészek középpontja felé haladva, mikor válik a fészek belseje közel ugyanolyanná, mint egy síkbeli spidron fészek.

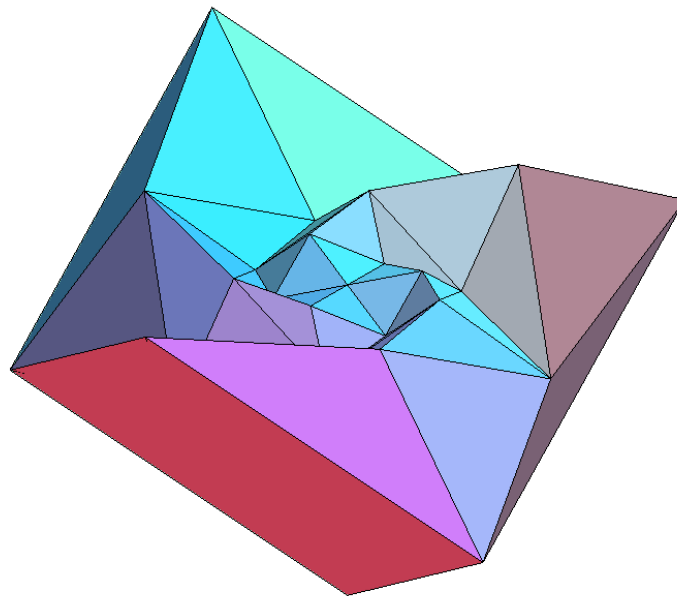
Itt <http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/powersof10/index.html> egy igen figyelemre méltó weblap, amely szemlélteti, hogy a világegyetem mérete mai ismereteink

szerint mintegy  $10^{23}$  méter, a legkisebb ismert (?) fizikai fogalom az atommagot alkotó kvark mérete  $10^{-16}$  méter.

Induljunk ki egy „világméretű” térbeli spidron-fészekből, amelynek egy éle – mondjuk –  $10^{23}$  méter. Mivel minden spidron-gyuru belső éle  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ -szor kisebb, mint a külső, mintegy 170 lépés után jutunk a kvark-méretű spidron gyuruhöz. Nos, a MAPLE segítségével könnyen belátható, hogy ennek az éle még több, mint  $6^\circ$ -os szöveget zár be a spidron síkjával. Persze mindez játék a formákkal (vagy fogalmakkal), amit nem kell túl komolyan venni.

Gyakorlatilag egy spidron-fészek modellje legfeljebb 5-6 gyuruból áll, a közepén egy lyukkal. Lerajzolni is legfeljebb 8-9 gyuruni részt érdemes.

Ha azt szeretnénk, hogy a spidron fészek felülete folytonos legyen, ezért ezt a belsejében lévő „lyukat” beföltözzük egy térbeli szabályos hatszöggel. Az így kapott véges sok háromszögből álló felület, amelyből alkalmasint poliéder állítható össze, azonban – matematikai szempontból – merev, mivel a belsejében lévő térbeli szabályos hatszöglap nem mozgatható.



Itt most éppen egy három spidron gyuruból, és a közepét beföltöző térbeli szabályos hatszöglapból és egy kocka három szomszédos lapjából álló  $6 \cdot 3 \cdot 2 + 6 + 3 = 45$  lapú poliédert mutatunk be. Ennek a konstrukciónak egy „jobbos” és egy „balos” változata egyetlen kockává illeszthető össze.

Megjegyezzük még, hogy nincs értelme felvetnünk azt a kérdést, hogy egy spirál-formát mutató spidron-fészek jobbra, vagy balra csavarodik-e, legfeljebb annak, hogy két, egymáshoz illesztett spidron-fészek ugyanolyan, vagy ellentétes irányú spirálvonalat közelít-e meg.

A spidron gyurukból, spidron fészekből építhető különböző szemet gyönyörködtető, fantáziát megmozgató konstrukciók előállításában azonban már a spidron felfedezőjének, és nem egy óvatos, olykor akadékoskodónak tuno géométernek a feladata.

Ugyancsak nagyobb – immár matematikai – fantáziát igényelne a „végtelenül mély” spidron-fészek értelmezése, és matematikai szempontú elemzése, amely során azt mondjuk, hogy az első spidron-gyurut kivéve mindegyiknek van egy külső és egy belső szomszédja. Azonban az ezzel kapcsolatos, vagy egyéb matematikai jellegű vizsgálatok már [túl mutatnak e cikk keretein](#).

Irodalom:

- [1] CROMWELL, P.M.: *Polyhedra* University Press, Cambridge, 1997
- [2] GOLDBERG, M: *Unstable Polyhedral Structures* Math. Magazine 51 (1978) pp165-170
- [3] SHARAGIN I. F: *So, what's wrong?* , QUANTUM , Vol 8, Number 6, July/August 1998., p. 34-37,53-54
- [4] CSIRMAZ LÁSZLÓ: *Mozoghat-e valaki, akit síklapokkal határolt páncélba öltöztettünk?* KÖMAL 1979 november (119.-123. old)
- [5] SKRJSZKÍJ – CSENCOV – JAGLOM: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 3. Geometria II. (Sztereometria)*Tankönyvkiadó, Budapest, 1968